**ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ**

**областной олимпиады**

**по общеобразовательным предметам**

**среди обучающихся профессиональных**

**образовательных организаций**

**МАТЕМАТИКА**

**2022 г.**

**Задание 1**. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону , где  5 мдлина покоящейся ракеты,  км/с скорость света, а скорость ракеты (в км/с ). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 3 м? Ответ выразите в км/с.

**Решение.**

Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 3 м. Задача сводится к решению уравнения  = 3 (м) при заданном значении длины покоящейся ракеты  5 м и известном значении скорости света  км/с:

 = 3 (км) ⇔  = 3 ⇔

⇔  ⇔  = ⇔

⇔  =  ⇔  ⇔

⇔  = 2,4 ⇔

⇔  240000 км/с.

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 3 м, поэтому минимальная необходимая скорость будет равна 240000 км/с.

**Ответ:** 240000 км/с.

**Задание 2**. Найти сумму корней уравнения tg 2 x + сtg 2 x + 3tg x + 3сtgx + 4 = 0 на промежутке [-π; 1,1π].

***Решение:***

Перепишем уравнение в следующем виде:

$tg 2 x + сtg 2 x + 3(tg x + сtgx) + 4 = 0 $и сделаем замену.

Пусть $tg x + сtgx=a. $

Обе части равенства возведем в квадрат: $\left(tg x + сtgx\right)^{2}=a^{2}. $

Раскроем скобки: $tg ^{2}x +2tgx сtgx+ctg^{2}x=a^{2}. $

Так как $tg x · сtgx = 1$, то $tg ^{2}x +2+ctg^{2}x=a^{2}$, а значит $tg ^{2}x+ctg^{2}x=a^{2}-2. $

Теперь исходное уравнение имеет вид:

$a^{2}-2+3a+4=0$;

Решая уравнение $a^{2}+3a+2=0$, получаем, $a=-1$ или $a=-2$

Сделаем обратную замену, имеем:

$tg x + сtgx=-1. $Или $tg x + сtgx=-2. $

Решим полученные уравнения.

$tg x + \frac{1}{tgx}=-1 $или $tg x + \frac{1}{tgx}=-2$

По свойству двух взаимно обратных чисел определяем, что первое уравнение не имеет корней, а из второго уравнения имеем:

$tg x =-1$, т.е. x = -π/4 + πk, k – целое число (k € Z).

Промежутку [-π; 1,1π] принадлежат корни: -π/4; -π/4 + π. Их сумма:

-π/4 + (-π/4 + π) = -π/2 + π = π/2.

**Ответ:**π/2.

**Задание 3**. Найдите значение выражения $2x+y+6z,$ если $4x+y=5,$ а $12z+y=7.$

**Решение.** Выполним преобразования: $4x+y+12z+y=5+7 \leftrightarrow 4x+2y+12z=12 \leftrightarrow 2x+y+6z=\frac{1}{2}∙12=6.$

**Ответ:** 6.

**Задание 4**. Найдите точку максимума функции $y=5+9x-\frac{x^{3}}{3}$.

**Решение:**

Найдем производную заданной функции $y^{,}=9-x^{2}=\left(3-x\right)\left(3+x\right).$

Нули производной: $x^{2}-9=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=3,\\x=-3.\end{array}\right.$

Определим знаки производной функции.



В точке 3 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому эта точка является точкой максимума.

**Ответ:** 3.

**Задание 5.** Решите неравенство $x^{2}log\_{25}x\geq log\_{25}x^{3}+xlog\_{5}x$.

**Решение.**

Перенесём все члены в левую часть и умножим на 2:

$$x^{2}log\_{25}x-3log\_{5}x-2xlog\_{5}x\geq 0 \leftrightarrow \left(x^{2}-2x-3\right)log\_{5}x\geq 0 \leftrightarrow \left(x-3\right) \left(x+1\right)log\_{5}x\geq 0.$$

Заметим, что $x>0$ поэтому $x+1>0$ Получаем $(x-3) log\_{5}x\geq 0.$

Решение неравенства: $0<x\leq 1 или x\geq $3.

**Ответ:** $\left(0;\right.\left.1\right]∪\left[3;\right.\left.+\infty \right)$.

**Задание 6**. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

**Решение.**

В самолете 12 + 18 = 30 мест удобны пассажиру В, а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна 30:300 = 0,1.

**Ответ:** 0,1.

**Задание 7**. Для того, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 6 км. на велосипеде и 40 км ⎯ на машине, дяде Ване требуется 2 час 12 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км ⎯ на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 8 км. пешком, проехать 10 км. на велосипеде и 160 км ⎯ на машине?

**Решение:**

Пусть $\frac{1}{x} , \frac{1}{y} , \frac{1}{z}– $скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно.

Тогда составим систему, согласно условию задачи:

$$\left\{\begin{array}{c}4x+6y+40z=132,\\5x+8y+30z=144.\end{array}\right.⇒\left\{\begin{array}{c}2x+3y=66-20z,\\5x+8y=144-30z.\end{array}\right.⇒\left\{\begin{array}{c}x=96-70z,\\y=40z-42.\end{array}\right.$$

Следовательно, $ 8x+10y+160z=8\left(96-70z\right)+10\left(40z-42\right)+160z=348 мин.$

$348 мин.=$ 5часов 48 мин**.**

**Ответ:** 5 часов 48 минут. (5,8 ч.)

**Задание 8**. Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

**Решение.**

При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходятся оставшиеся 10%.

**Ответ:** 10%.

**Задание 9**. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, которое является квадратом. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна *a*, сторона квадрата в сечении равна *b*.

**Решение:**

Пусть $H-$ длина высоты пирамиды, $l-$ длина бокового ребра. Тогда объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}∙\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}∙H.$$

Выразим высоту $ H $ через *a* и *b*.

Так как $ H^{2}=l^{2}-\frac{a^{2}}{3} $, $\frac{l}{a}=\frac{b}{a-b } $, то $ H^{2}=\frac{a^{2}b^{2}}{(a-b)^{2}}-\frac{a^{2}}{3}=\frac{a^{2}b^{2}}{(a-b)^{2}}\left(2b^{2}+2ab-a^{2}\right)^{2}$.

Следовательно,
$$V=\frac{a^{3}∙\sqrt{2b^{2}+2ab-a^{2}}}{12(a-b)}.$$

**Ответ:** $V=\frac{a^{3}∙\sqrt{2b^{2}+2ab-a^{2}}}{12\left(a-b\right)}.$

**Задание 10.** Относительно квадратного трехчлена $ f\left(x\right)$ известно, что $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$,

 $f\left(2\right)+f\left(3\right)=0$. Чему равна сумма корней уравнения $f\left(x\right)=2020.$

**Решение:**

Выпишем квадратный трехчлен $ f\left(x\right)$ в общем виде:

$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c, a\ne 0$.

Учитывая, что $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$, $f\left(2\right)+f\left(3\right)=0$, получим

$$\left\{\begin{array}{c}a+b+2c=0,\\13a+5b+2c=0.\end{array}\right.$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $b=-3a.$ Подставляя последнее равенство в первое уравнение, получим $c=a.$ Следовательно, уравнение

$f\left(x\right)=2020 $примет вид:

$ax^{2}-3ax+a-2020=0$.

Так как $a\ne 0$, $x^{2}-3x+\frac{a-2020}{a}=0$.

Следовательно, по теореме Виета сумма корней уравнения равна 3 (при условии, что корни существуют).

**Ответ:** 3.