**ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ**

**областной олимпиады обучающихся учреждений**

 **профессионального образования Кемеровской**

**области по дисциплине**

**МАТЕМАТИКА**

**2021 г.**

**Задание 1**. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускорено наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $ φ=ῳt+\frac{βt^{2}}{2}$, где *t* − время в минутах, $ῳ=20°/мин^{2}$− начальная угловая скорость вращения катушки, а $β=4°/мин^{2}$ − угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки $φ$достигнет $1200°.$

Определите время после начала работы лебeдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

**Решение:** Подставляем в исходную формулу известные характеристики, получаем $20t+2t^{2}\leq 1200$. Решаем неравенство $2t^{2}+20t-1200\leq 0$, учитываем, что $t\geq 0 $получаем, что $0\leq t\leq 20$. Делаем вывод, что через 20 минут, после начала рабoты лебёдки рабочий должен проверить её работу.

**Ответ:** 20 минут.

**Задание 2.** Сколько различных решений на отрезке [$0^{0}; 540^{0}$] имеет уравнение$ 4cos^{2}\left(x+270^{0}\right)-9sinx+5=0$.

**Решение:** Применяя формулу приведения $cos\left(270^{0}+x\right)=sinx$, получим квадратное уравнение $4sin^{2}x-9sinx+5=0$ относительно функции $y=sinx$. Так как $\left|sinx\right|\leq 1$, то единственным корнем этого уравнения будет число 1. Решая простейшее тригонометрическое уравнение $sinx=1$, получим $x=90^{0}+360^{0}n, n\in Z$. Если n принимает значение 0 и 1, то $x\_{1}=90^{0}$, а $x\_{2}=450^{0}$. Других корней на заданном отрезке [$0^{0}; 540^{0}$] нет.

**Ответ:** 2 корня на отрезке [$0^{0}; 540^{0}$].

**Задание 3.** Найдите значение выражения: $\frac{35}{cos^{2}84^{0}+cos^{2}174^{0}}.$

**Решение:** Преобразуем выражение, используя формулы приведения, получим: $\frac{35}{cos^{2}84^{0}+cos^{2}174^{0}}=\frac{35}{cos^{2}84^{0}+sin^{2}84^{0}}=35.$

**Ответ:** 35.

**Задание 4.** Решите неравенство$\frac{\left|x+1\right|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^{2}+x}}\geq 0.$

**Решение:** ОДЗ числителя и знаменателя $3x+7\geq 0, x\left(x+1\right)\geq 0, 4-2x\geq 0;$ $x\in \left[-\frac{7}{3}; -1\right]∪\left[0;2\right]$.

В указанной области исходное неравенство эквивалентно следующему

$\frac{\left(x+1\right)^{2}-3x-7}{x^{2}+x-\left(4-2x\right)}\leq 0,$ $ \frac{x^{2}-x-6}{\left(x+4\right)\left(x-1\right)}\leq 0, $ $\frac{\left(x+2\right)(x-3)}{\left(x+4\right)\left(x-1\right)}\leq 0,$

$x\in \left[-\frac{7}{3}; -2\right]∪\left(1;\left.2\right]\right.$.

**Ответ:** $x\in \left[-\frac{7}{3}; -2\right]∪\left(1;\left.2\right]\right.$.

**Задание 5.** Решите систему уравнений $\left\{\begin{array}{c}x^{lgy}=100,\\log\_{y}x=2.\end{array}\right.$

**Решение:** Логарифмируя первое уравнение при условиях$x>0, y>0, y\ne 1$, получим $lgy∙lgx=2.$Из второго уравнения находим $y^{2}=x$.

Решаем полученную систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}x=y^{2},\\lgy∙lgx=2;\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x=y^{2},\\lgy∙lgy^{2}=2;\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x=y^{2},\\2lg^{2}y=2;\end{array}\right.$$

Последняя система имеет решения $x\_{1}=100, y\_{1}=10; x\_{2}=0,01, y\_{1}=0,1$.

**Ответ:** $\left(100;10\right); \left(0,01;0,1\right)$.

**Задание 6.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x};y=x+1;y=0, x=3.$$

**Решение**: Выполнив чертеж видно, что площадь фигуры можно вычислить с помощью двух определенных интегралов.

1) На отрезке$\left[-1;1\right]$ над осью OX – график прямой $ y=x+1$;

2) На отрезке$ \left[1;3\right] $над осью OX – график гиперболы $y=\frac{2}{x}$.



В процессе выполнения задания привести рисунок.

**Ответ:** $S=2(1+ln3)$.

**Задание 7.** Найдите наименьшее значение функции

$f\left(x\right)=x^{3}-x^{2}-40x-15$ при $\left|x+3\right|\leq 2$

**Решение:**

1. $\left|x+3\right|\leq 2 \leftrightarrow -2\leq x-3\leq 2; -1\leq x\leq 5. $
2. $f’\left(x\right)=3x^{2}-2x-40$; $f’\left(x\right)=0$ при $x=-\frac{10}{3}$и $x=4$.

$4\in \left[-1; 5\right]$*,* $-\frac{10}{3}\notin \left[-1; 5\right]$

$f’\left(-1\right)=23$*;* $f’\left(5\right)=-115; f’\left(-\frac{10}{3}\right)=-49\frac{22}{27}; f’\left(4\right)=-125.$

**Ответ:**$-125.$

**Задание 8.** С 12 ноября Центробанк России поднял ставку рефинансирования до 12 % годовых. Если ставка по депозиту выше ставки рефинансирования, то с разницы вкладчику необходимо заплатить подоходный налог в размере 35 %. Сколько процентов составит реальный доход вкладчика при ставке по депозиту в 15 %?

**Решение**. Пусть вклад составляет 10000 рублей. Тогда прирост вклада составит 1500 рублей, а необлагаемая налогом часть 1200 рублей. С суммы в 300 руб. возьмут налог $300∙0,35=105$ руб. Таким образом, фактический доход будет $1500-105=1395$ руб., что составит 13,95 % от первоначального вклада.

**Ответ:** 13,95 %.

**Задание 9.** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 21 пассажиров, равна 0,5. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 21 до 29.

**Решение:** Обозначим следующие события:

А — «в автобусе меньше 21 пассажиров», его вероятность равна 0,5.

В — «в автобусе от 21 до 29 пассажиров», вероятность, которую необходимо найти.

Теперь найдём сумму вероятностей А и В. Их сумма — это событие:

 А + В — «в автобусе меньше 30 пассажиров».

Действительно, события А и В независимые (несовместные), то есть, они не могут произойти одновременно.

Вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

Р (А + В) = Р (А) + Р (В)

Тогда, используя данные, получаем:

0,93 = 0,5 + Р (В)

Таким образом, Р (В) = 0,93 – 0,5 = 0,43

**Ответ:** 0,43

**Задание 10.** Решить неравенство $x+\sqrt{a-x}\geq 0$, $a>0.$

**Решение.** Неравенство определено при $x\leq a .$ Запишем неравенство в виде $\sqrt{a-x}>-x$ . При $0\leq x\leq a$ неравенство не имеет смысла, так как в левой части стоит неотрицательная величина. При $x<0$ исходное неравенство равносильно следующему: $a-x>x^{2}$. Решая последнее неравенство, получаем $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}<x<0$.

**Ответ:** $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}<x<a$.

**Задание 11.** Какой объем краски потребуется, чтобы окрасить внешнюю поверхность цилиндрической трубы диаметра 1 м и длины 10 м слоем краски в 1 мм? Ответ дайте в кубических дециметрах. (Примите **π≈3.).**

**Решение:** Площадь внешней поверхности трубы примерно равна 30 м2. Объем краски примерно равен 30 дм3.

**Ответ:** 30 дм3